

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 133

A2. Διατύπωση θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 51

A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 185

A4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$B_1 \quad h: A_h = \left\{ x \in [2, +\infty) \mid g(x) \in (1, +\infty) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 2$$

$$h(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2})$$

$$B_2 \quad h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow 2 \ln(\sqrt{x_1-2}) = 2 \ln(\sqrt{x_2-2}) \Rightarrow$$

$$\ln(\sqrt{x_1-2}) = \ln(\sqrt{x_2-2}) \Rightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$h(x) = y \Rightarrow 2 \ln(\sqrt{x-2}) = y \Rightarrow \ln(\sqrt{x-2}) = \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x-2} = e^{\frac{y}{2}} \Rightarrow x-2 = e^y \Rightarrow x = e^y + 2$$

$$f^{-1}(x) = e^x + 2$$

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \ln(\sqrt{x-2}) \cdot \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 2(-\infty) \cdot 1 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = \frac{1}{1} = 1.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{x^2} = l$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} kx = l$

$\Rightarrow k=0$

διότι αν $k > 0$ τότε $l = +\infty$
αν $k < 0$ τότε $l = -\infty$ } άτοπο.

$\cdot f'(0) = 1$

$f'(x) = \frac{k(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{k}{1} = 1 \Rightarrow k = 1.$

Γ2. i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		

ΤΕ ΤΜ

Τίμη τοπικού ελαχίστου $-\frac{1}{2}$

Τίμη τοπικού μεγίστου $\frac{1}{2}$

12. ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ άρα $Af = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

αν $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2}$ άρα καμία ρίζα

αν $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$ μία ρίζα $x = 1$.

13. i) $I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx$
 $= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2}$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$

$I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Rightarrow I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}$

$I_1 + I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = -\frac{1 - \ln 2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\phi(x) = g(x) + x$

$\phi(-1) = g(-1) - 1 < 0$ γιατί $g(x) < 1 \Rightarrow g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$

$\phi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$ άρα $\phi(0) \cdot \phi(-1) < 0$ και η ϕ συνεχής

$\Rightarrow$ Υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τ.ω. $\phi(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

$\phi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ άρα η ϕ γνησίως μονότονη

άρα μοναδική ρίζα.

Δ2. με τη συνέχεια δεν μπορώ να βρω κ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \frac{1}{\omega x} - \kappa \right) = 3 - \kappa$$

$$\text{όρα } 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

$$\Delta 3. i) x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'(x) = 2\omega\nu x + \frac{1}{\omega\nu^2 x} - 3$$

$$f'(x) = \frac{2\omega\nu^3 x + 1 - 3\omega\nu^2 x}{\omega\nu^2 x}$$

$$\text{Θέτω } \omega\nu x = t$$

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Rightarrow (t-1) \cdot (2t^2 - t - 1) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 1 \\ \hline \downarrow & 2 & -1 & -1 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -\infty & -1/2 & 1 & +\infty \\ & - & + & + \end{array}$$

$$\text{Αρα για } t > 0 \Rightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 > 0 \Rightarrow 2\omega\nu^2 x + 1 - 3\omega\nu^2 x > 0$$

$$\text{Αρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$$

$$\text{Αρα } x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$ii) 3f(x) = \pi \Rightarrow 3f(x) - \pi = 0$$

$$\phi(x) = 3f(x) - \pi$$

$$\phi(0) = 3f(0) - \pi = -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) = +\infty$$

Δ4. Η $\phi(x) = g(x) + x_1$ έχει μοναδική ρίζα τη x_1

άρα $\phi(x_1) = 0$ όπως $\phi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$

$$(0 < g(x) < 1)$$

και επειδή διαστηρεί πρόσημο άρα $\phi(x) > 0$ στο $(x_1, 0)$

$$f(x) \geq 0$$

$$3f(x_2) = \pi$$

$$f(x_2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{οπότε } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi/3} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi/3} 2\cos x + \epsilon \phi x - 3x dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = \left[-2\sin x - \ln|\cos x| - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\pi/3} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) + x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4}$$

$$\text{άρα } \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}$$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right)$$

$$= -x_1^3(-x_1) - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{3x_1^4}{4}$$

$$= \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

$$A_1 = [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(A_1) = [-\pi, \infty)$$

Το $0 \in f(A_1)$ και η $f \uparrow$ στο $A_1 \Rightarrow$ Υπάρχει μοναδική ρίζα $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}) : 3f(x_2) = \pi$.